Valori proibiti per il conduttore delle funzioni L di grado 2 e frazioni continue

(con J.Kaczorowski e M.Radziejewski)

6th Number Theory Meeting
Torino, 22-23 Settembre 2022

• **Funzioni L.**

- *Classe di Selberg $\mathcal{S}$*

i) serie di Dirichlet $F(s)$ ass. conv. per $\sigma > 1$;

ii) prolungamento su $\mathbb{C}$ con al più polo in $s = 1$;

iii) equazione funzionale

$$\gamma(s)F(s) = \omega\overline{\gamma(1-\overline{s})}\,\overline{F(1-\overline{s})},$$

$$\gamma(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

con $|\omega| = 1$, $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, $\Re(\mu_j) \geq 0$;

iv) condizione di Ramanujan $a(n) \ll n^{\varepsilon}$;

v) prodotto di Eulero

$$F(s) = \prod_p F_p(s), \qquad F_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(p^k)}{p^{ks}}.$$

- *Classe di Selberg estesa $\mathcal{S}^\sharp$*: serie di Dirichlet $F \not\equiv 0$ soddisfacenti i)-iii); quindi

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^\sharp.$$

- **Problemi, congetture e stato dell'arte.**

Problema generale: descrivere il contenuto di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^\sharp$ per mezzo di *invarianti*; difficile !

Congetture: posto $d = 2\sum_{j=1}^r \lambda_j$, **grado** di $F \in \mathcal{S}^\sharp$ (invariante importante)
- $d \notin \mathbb{N} \longrightarrow$ no funzioni di grado d in $\mathcal{S}^\sharp$;
- $d \in \mathbb{N} \longrightarrow \{F \in \mathcal{S}$ di grado $d\} =$
$\{$funzioni L automorfe di grado $d\}$;
- $d \in \mathbb{N} \longrightarrow \{F \in \mathcal{S}^\sharp$ di grado $d\} =$???

Stato dell'arte: $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^\sharp$ note per gradi $d < 2$ (Conrey-Ghosh 1993, Kac.-Per. 1999-2011); congetture confermate e descrizione di $F \in \mathcal{S}^\sharp$ con $d = 0$ (*opportuni D-polinomi*) e $d = 1$ (*opportune combinazioni lineari di* $L(s,\chi)$).

Primo caso aperto: $d = 2$; ci si aspetta
- $F \in \mathcal{S} \to$ funzioni L delle eigenforms di Hecke e Maass di livello arbitrario;
- $F \in \mathcal{S}^\sharp \to$??? (funzioni L dei gruppi $G(\lambda)$ di Hecke ?).

Anche caso generale $d = 2$ difficile ! *Problema speciale*: provare non-esistenza di funzioni L di grado 2 per valori di opportuni invarianti.

• **Risultati per $d = 2$ e frazioni continue.**
Altro importante invariante in $\mathcal{S}^\sharp$: **conduttore**

$$q = (2\pi)^d Q^2 \prod_{j=1}^r \lambda_j^{2\lambda_j};$$

in casi concreti $q =$ livello/discriminante del campo algebrico/...; quindi per $d = 2$ ci si aspetta
- $F \in \mathcal{S} \longrightarrow q \in \mathbb{N}$;
- $F \in \mathcal{S}^\sharp \longrightarrow$??? ($q = \lambda^2$ con $\lambda = 2\cos(\pi/m), m \geq 3$, e $\lambda \geq 2$?).

Caso $q = 1$: completamente risolto in $\mathcal{S}^\sharp$ (Kac.-Per. 2022): L delle cuspforms di Hecke e Maass per il gruppo modulare; probabilmente tecniche estendibili ai casi $q = 2, 3, 4$.

Non-esistenza per $0 < q < 4$, $q \neq 4\cos^2(\pi/m)$ *?*
Approccio via certe **frazioni continue.**

Fissato $q > 0$ e dato $\mathbf{m} = (m_0, ..., m_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ sia

$$c(q, \mathbf{m}) = m_k + \cfrac{1}{qm_{k-1} + \cfrac{q}{qm_{k-2} + \cfrac{q}{\ddots + \cfrac{q}{qm_0}}}}$$

con $k \geq 0$ e *tutti denominatori* $\neq 0$; in tal caso:
$\mathbf{m}$ - **cammino**;
$\mathbf{m}$ - **proprio** se $m_j \neq 0$ per $j = 0, ..., k-1$;
$\mathbf{m}$ - **ciclo** se $c(q, \mathbf{m}) = 0$.

Peso di $\mathbf{m}$:

$$w_q(\mathbf{m}) = \begin{cases} q^{k/2} \prod_{j=0}^{k-1} |c(q,\mathbf{m}_j)| & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

con $\mathbf{m}_j = (m_0, ..., m_j)$, $0 \leq j \leq k-1$; quindi

$w_q(\mathbf{m})$ indipendente da m_k e $w_q(\mathbf{m}) > 0$.

Il **peso** w_q **è unico** se

$w_q(\mathbf{m}) = w_q(\mathbf{n})$ per ogni $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ con $c(q,\mathbf{m}) = c(q,\mathbf{n})$;

si dimostra che

w_q *è unico* $\Leftrightarrow$ $w_q(\mathbf{m}) = 1$ *per ogni ciclo proprio* $\mathbf{m}$.

Teorema. *Se esiste $F \in \mathcal{S}^\sharp$ con grado 2 e conduttore q allora il peso w_q è unico.*

Teorema si presta a computazioni: $w_q(\mathbf{m}) \neq 1$ per un ciclo proprio $\mathbf{m}$ $\Rightarrow$ non esistono $F \in \mathcal{S}^\sharp$ con $d = 2$ e conduttore q. Esempi:

$q = 2/3$, $\mathbf{m} = (1, -1, -3)$, $w_q(\mathbf{m}) = 1/3 \rightarrow \nexists$

$q = \sqrt{3}$, $\mathbf{m} = (1, 1, 1, -1, 1)$, $w_q(\mathbf{m}) = \sqrt{3}+2 \rightarrow \nexists$

Con opportuno programma al computer:

Corollario. *Non esistono* $F \in \mathcal{S}^\sharp$ *con* $d = 2$ *e conduttore della forma*

$$q = \frac{a}{nb} \text{ con } (a,b) = 1,\ 2 \le b \le 300 \text{ e } n \ge 1$$

se vale almeno una delle seguenti condizioni:

- $b \le 292$ *e* $a/b < 1$*,*
- $b \le 150$ *e* $a/b < 3/2$*,*
- $b \le 100$ *e* $a/b < 2$*,*
- $b \le 30$ *e* $a/b < 3$*,*
- $b \le 9$ *e* $a/b < 4$*,*
- $a \le 25$ *e* $a/b < 4$*.*

Ci sono però casi in cui il Teorema *non si può applicare*, ad es. se per un dato q ogni $a \in \mathbb{R}$ si rappresenta come $a = c(q, \mathbf{m})$ con $\mathbf{m}$ proprio *in al più un modo*; infatti in tal caso w_q è necessariamente unico.

Si dimostra che questo succede se q è *trascendente* oppure $q \ge 4$ (semplice) e *per certe classi di numeri algebrici* (meno semplice).

Problema interessante: Esiste $q > 0$ con $w(q)$ unico ma non esistono $F \in \mathcal{S}^\sharp$ di grado 2 con conduttore q ? (forse $q = (3 - \sqrt{5})/2$?).

• **Idea della dimostrazione.**

$F \in \mathcal{S}^\sharp$ con $d = 2$ e conduttore $q \Longrightarrow$ twist non-lineari

$$F(s,\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e^{-2\pi i(\alpha n + \beta\sqrt{n})}$$

soddisfano la formula di trasformazione

$$F(s,\alpha,\beta) = e^{as+b}\ F\left(s, \frac{1}{q\alpha}, -\frac{\beta}{\sqrt{q}\alpha}\right) + h(s)$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ e $h(s)$ olomorfa per $\sigma > 1/2$. Si ha:

$$* \quad \mathcal{F}(s,\alpha+m,\beta) = F(s,\alpha,\beta) \quad \text{se } m \in \mathbb{Z}$$

$$* \quad F(s,0,\beta) = \text{ twist standard } F(s,\beta)$$

e, definendo lo **spettro** di F come

$$\text{Spec}(F) = \{2\sqrt{m/q} : m \in \mathbb{N}, a(m) \neq 0\},$$

$*\quad F(s,\beta)$ ha polo in $s = 3/4 \Longleftrightarrow \beta \in \text{Spec}(F)$.

Con ripetute applicazioni della formula di trasformazione si ottiene allora (**essenzialmente**) che dato un vettore di interi $\mathbf{m} = (m_0, ..., m_k)$

$$
\begin{aligned}
F(s,\beta) &= F(s,m_0,\beta)\\
&= F\left(s,\frac{1}{qm_0},\frac{\beta}{\sqrt{q}|m_0|}\right)\\
&= F\left(s,m_1+\frac{1}{qm_0},\frac{\beta}{\sqrt{q}|m_0|}\right)\\
&= F\left(s,\frac{1}{qm_1+\frac{q}{qm_0}},\frac{\beta}{q|(m_1+\frac{1}{qm_0})m_0|}\right)\\
&= F\left(s,m_2+\frac{1}{qm_1+\frac{q}{qm_0}},\frac{\beta}{q|(m_1+\frac{1}{qm_0})m_0|}\right)\\
&= \dots\\
&= F\left(s,c(q,\mathbf{m}),\frac{\beta}{w_q(\mathbf{m})}\right).
\end{aligned}
$$

Se $c(q,\mathbf{m})=0$ (ovvero è un *ciclo*) si riottiene il twist standard $F(s,\beta/w_q(\mathbf{m}))$, e grazie alla sua struttura polare si deve avere

$$\beta \in \text{Spec}(F) \iff \beta/w_q(\mathbf{m}) \in \text{Spec}(F).$$

Dalla forma di Spec(F) si ha allora che

$$w_q(\mathbf{m}) = 1,$$

ovvero w_q è unico.