Sezioni della superficie ellittica di Legendre

Francesco Tropeano

Dipartimento di Matematica e Informatica

Piano della presentazione

Superfici ellittiche

Definizione

Sia $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfismo suriettivo, dove B è una curva affine liscia complessa, $\mathcal{S}$ è una superficie quasi-proiettiva complessa. Diremo che $\pi : \mathcal{S} \to B$ è una ***fibrazione di genere g*** *se le fibre $\mathcal{S}_b := \pi^{-1}(b)$ sono curve irriducibili proiettive lisce di genere g.*

Definizione

Una ***sezione*** *di $\mathcal{S} \to B$ è un morfismo $\sigma : B \to \mathcal{S}$ tale che $\pi \circ \sigma$ sia l'identità di B.*

Superfici ellittiche

Definizione

*Sia $\pi : \mathcal{S} \to B$ un morfismo suriettivo, dove B è una curva affine liscia complessa, $\mathcal{S}$ è una superficie quasi-proiettiva complessa. Diremo che $\pi : \mathcal{S} \to B$ è una **fibrazione di genere g** se le fibre $\mathcal{S}_b := \pi^{-1}(b)$ sono curve irriducibili proiettive lisce di genere g.*

Definizione

*Una **sezione** di $\mathcal{S} \to B$ è un morfismo $\sigma : B \to \mathcal{S}$ tale che $\pi \circ \sigma$ sia l'identità di B.*

Superfici ellittiche

Definizione

Sia $\pi : \mathcal{E} \to B$ una fibrazione di genere g. Diremo che $\pi : \mathcal{E} \to B$ è una ***superficie ellittica*** *se*

1. *$g=1$;*
2. *esiste una sezione $\sigma_0 : B \to \mathcal{E}$.*

Le fibre $\mathcal{E}_b := \pi^{-1}(b)$ sono curve ellittiche; in particolare, sceglieremo il punto $\sigma_0(b)$ come origine della fibra $\mathcal{E}_b$.

Definizione

Diremo che la superficie ellittica è ***isotriviale*** *se tutte le fibre (lisce) sono isomorfe tra loro.*

Superfici ellittiche

Definizione

*Sia $\pi : \mathcal{E} \to B$ una fibrazione di genere g. Diremo che $\pi : \mathcal{E} \to B$ è una **superficie ellittica** se*

1. *g=1;*
2. *esiste una sezione $\sigma_0 : B \to \mathcal{E}$.*

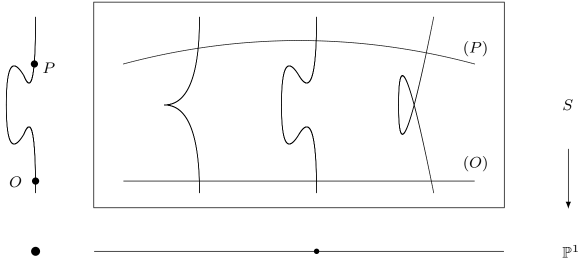
Le fibre $\mathcal{E}_b := \pi^{-1}(b)$ sono curve ellittiche; in particolare, sceglieremo il punto $\sigma_0(b)$ come origine della fibra $\mathcal{E}_b$.

Definizione

*Diremo che la superficie ellittica è **isotriviale** se tutte le fibre (lisce) sono isomorfe tra loro.*

Superfici ellittiche

Possiamo pensare alle superfici ellittiche come una famiglia $\mathcal{E} \to B$ di curve ellittiche parametrizzate dai punti di una curva B, dove una sezione è un morfismo σ tale che $\sigma(b) \in \mathcal{E}_b$.



Periodi

Periodi

Ricordiamo che $\mathcal{E}_b \cong \mathbb{C}/\Lambda_b$. Pertanto alla superficie ellittica $\mathcal{E} \to B$ possiamo associare una famiglia di reticoli

$$\Lambda_b, \quad b \in B.$$

Scegliendo una base per ogni reticolo possiamo costruire le due funzioni seguenti:

$$b \mapsto \omega_1(b), \qquad b \mapsto \omega_2(b).$$

Su opportuni aperti $U \subset B$ è possibile scegliere i periodi in modo che $\omega_1, \omega_2 : U \to \mathbb{C}$ siano funzioni olomorfe.

Logaritmo ellittico

Definizione

Data una sezione $\sigma : B \to \mathcal{E}$, un ***logaritmo*** *di σ su un aperto $U \subset B$ è un sollevamento di $\sigma_{|U}$ ad $U \times \mathbb{C}$.*

$$\begin{tikzcd} & U \times \mathbb{C} \arrow[d] \\ B \supset U \arrow[ur, "(id{,}\xi)"] \arrow[r, "\sigma_{|U}"] & \mathcal{E}_{|U}. \end{tikzcd}$$

Mappa di Betti

Il logaritmo $\xi : U \to \mathbb{C}$ può essere scritto utilizzando i periodi:

$$\xi(b) = \beta_1(b)\omega_1(b) + \beta_2(b)\omega_2(b).$$

Definizione

La mappa associata

$$(\beta_1, \beta_2) : U \to \mathbb{R}^2, \qquad b \mapsto (\beta_1(b), \beta_2(b))$$

*è detta **mappa di Betti** di σ.*

Superficie ellittica di Legendre

Esempio

*La **superficie ellittica di Legendre** è data da $\mathcal{L} \to S$, dove $S = \mathbb{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$ e $\mathcal{L}$ è definito in $\mathbb{P}_2 \times S$ da*

$$Y^2 Z = X(X - Z)(X - \lambda Z), \qquad (X : Y : Z) \in \mathbb{P}_2, \quad \lambda \in S.$$

Una sezione è data da

$$\sigma_0 : \lambda \mapsto (0 : 1 : 0) \in \mathcal{L}_\lambda.$$

Scegliamo come origine di $\mathcal{L}_\lambda$ il punto all'infinito $(0 : 1 : 0) \times \lambda$.

Periodi nella superficie ellittica di Legendre

Nel caso della superficie di Legendre in un aperto adeguatamente scelto si ottiene:

$$\omega_1(\lambda) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}^2 \lambda^n, \qquad \omega_2(\lambda) = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}^2 (1-\lambda)^n.$$

Siano g_1, g_2 *le classi di omotopia dei cammini che si avvolgono una volta attorno a* $0, 1$ *rispettivamente. Prolungando lungo tali cammini otteniamo:*

$$\begin{aligned} g_1 \cdot \omega_1 &= \omega_1, & g_2 \cdot \omega_1 &= \omega_1 + 2\omega_2, \\ g_1 \cdot \omega_2 &= \omega_2 + 2\omega_1, & g_2 \cdot \omega_2 &= \omega_2. \end{aligned}$$

Superficie ellittica di Legendre

Monodromia dei periodi nella superficie ellittica di Legendre

Si ha quindi la seguente identificazione:

$$g_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici generano il sottogruppo Γ_2 *di* $\Gamma(2) \subset SL_2(\mathbb{Z})$*, ossia*

$$\Gamma_2 = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : M \equiv I_2 \mod 2, \quad a, d \equiv 1 \mod 4 \right\},$$

che è il ***gruppo di monodromia*** *di* $\mathcal{L} \to S$.

Superficie ellittica di Legendre

Osservazione

Ogni superficie ellittica non isotriviale $\mathcal{E} \to B$ può essere ottenuta come pull-back della superficie di Legendre tramite un morfismo $B \to \mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ in generale ramificato:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, \infty\}. \end{tikzcd}$$

Sezioni di torsione

Le sezioni definite sopra, ossia i morfismi $\sigma : B \to \mathcal{E}$ tali che $\sigma(b) \in \mathcal{E}_b$, sono dette sezioni **razionali**.

Definizione

Una sezione razionale $\sigma : B \to \mathcal{E}$ è detta di ***torsione*** *se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che*

$$n \cdot \sigma(b) = 0_b \quad \textit{per ogni } b \in B,$$

dove 0_b indica l'origine della curva ellittica $\mathcal{E}_b$. Il più piccolo numero naturale n con questa proprietà è detto ***ordine di σ****.*

Sezioni razionali

Proposizione

L'insieme delle sezioni razionali di una superficie ellittica $\mathcal{E} \to B$ forma un gruppo rispetto all'operazione

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(b) = \sigma_1(b) + \sigma_2(b),$$

*dove l'operazione a destra dell'uguale è quella della fibra $\mathcal{E}_b$. Tale gruppo sarà indicato con $\mathcal{E}(B)$ e sarà chiamato **gruppo di Mordell-Weil** di $\mathcal{E} \to B$.*

Sezioni algebriche

Le sezioni razionali sono l'analogo dei punti razionali di una curva ellittica.

Proposizione

Sia $K = \mathbb{C}(B)$ il campo di funzioni di B. Le sezioni razionali $\sigma \in \mathcal{E}(B)$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti K-razionali di E, dove E è la fibra generica di $\mathcal{E} \to B$.

Data una curva ellittica su un campo di funzioni E/K possiamo considerare i punti di E in un'estensione finita $L \supset K$. Questa estensione di campi corrisponde a un morfismo tra curve algebriche lisce $B' \to B$ e si ha $L = \mathbb{C}(B')$.

Sezioni algebriche

Le sezioni razionali sono l'analogo dei punti razionali di una curva ellittica.

Proposizione

Sia $K = \mathbb{C}(B)$ il campo di funzioni di B. Le sezioni razionali $\sigma \in \mathcal{E}(B)$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti K-razionali di E, dove E è la fibra generica di $\mathcal{E} \to B$.

Data una curva ellittica su un campo di funzioni E/K possiamo considerare i punti di E in un'estensione finita $L \supset K$. Questa estensione di campi corrisponde a un morfismo tra curve algebriche lisce $B' \to B$ e si ha $L = \mathbb{C}(B')$.

Sezioni algebriche

Data l'estensione $\mathbb{C}(B) \subset \mathbb{C}(B')$, la fibra generica E di $\mathcal{E} \to B$ vista come curva ellittica su $\mathbb{C}(B')$ ci dà una superficie ellittica $\mathcal{E}' \to B'$ (**modello di Néron**), dove $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \times_B B'$. Allora otteniamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' := B' \times_B \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ B' \arrow[r] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & B. \end{tikzcd}$$

I punti di $E/\mathbb{C}(B')$ sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni di $\mathcal{E}' \to B'$.

Sezioni algebriche

Definizione

Sia $\mathcal{E} \to B$ una superficie ellittica e sia $p : B' \to B$ un morfismo tra curve algebriche lisce. Possiamo allora costruire il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' := B' \times_B \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, shift right] & \mathcal{E} \arrow[d] \\ B' \arrow[r, "p"] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & B. \end{tikzcd}$$

Una sezione razionale σ di $\mathcal{E}' \to B'$ è detta ***sezione algebrica*** *di $\mathcal{E} \to B$. In particolare se esiste un morfismo non ramificato p che soddisfa la definizione, diremo che σ è una sezione algebrica* ***non ramificata****.*

Sezione di Masser

La fibra generica della superficie ellittica di Legendre è la curva ellittica $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$ definita su $\mathbb{C}(\lambda)$. La funzione

$$\begin{aligned} \sigma : S &\to \mathcal{L} \\ \lambda &\mapsto \left(2 : \sqrt{2(2-\lambda)} : 1\right) \end{aligned}$$

è detta **sezione di Masser**. *Essa non è una sezione razionale!* L'estensione di campi

$$\mathbb{C}(S) \subset \mathbb{C}(S)(\psi), \qquad \textit{dove } \psi^2 := 2-\lambda$$

ci dà una curva non singolare B e un morfismo $B \to S$ di grado 2 ramificato su $\lambda = 2$.

Sezione di Masser

Il pull-back $\mathcal{E}$ di $\mathcal{L}$ tramite $B \to S$ può essere visto come la curva ellittica definita da $y^2 z = x(x-z)(x+(\psi^2-2)z)$ sul campo $\mathbb{C}(S)(\psi)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & S \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Il pull-back di σ è un punto di $\mathbb{C}(B)$, i.e. $\tilde{\sigma} = (2 : \sqrt{2}\psi : 1)$. In altri termini σ si solleva a una sezione razionale di $\mathcal{E} \to B$ e pertanto *è una sezione algebrica* di $\mathcal{L} \to S$.

Sezioni di $\mathcal{L} \to S$

Esempi di sezioni razionali

Ricordiamo che per ogni curva ellittica della forma $y^2 z = x(x-z)(x-\lambda z)$, *si ha*

$$E_\lambda[2] = \{(0:1:0),(0:0:1),(1:0:1),(\lambda:0:1)\}.$$

Alcune sezioni della superficie di Legendre sono date da:

- $\sigma_1 : \lambda \mapsto (0:1:0) \times \lambda$,
- $\sigma_2 : \lambda \mapsto (0:0:1) \times \lambda$,
- $\sigma_3 : \lambda \mapsto (1:0:1) \times \lambda$,
- $\sigma_4 : \lambda \mapsto (\lambda:0:1) \times \lambda$.

L'insieme $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ *è un sottogruppo di* $\mathcal{L}(S)$ *formato dalle sezioni razionali di ordine 2 (con la sezione identità).*

Sezioni di $\mathcal{L} \to S$

Esempi di sezioni razionali

Ricordiamo che per ogni curva ellittica della forma $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$, si ha

$$E_\lambda[2] = \{(0:1:0), (0:0:1), (1:0:1), (\lambda:0:1)\}.$$

Alcune sezioni della superficie di Legendre sono date da:

- $\sigma_1 : \lambda \mapsto (0:1:0) \times \lambda$,
- $\sigma_2 : \lambda \mapsto (0:0:1) \times \lambda$,
- $\sigma_3 : \lambda \mapsto (1:0:1) \times \lambda$,
- $\sigma_4 : \lambda \mapsto (\lambda:0:1) \times \lambda$.

L'insieme $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ è un sottogruppo di $\mathcal{L}(S)$ formato dalle sezioni razionali di ordine 2 (con la sezione identità).

Alcuni risultati

Teorema

1. *Le uniche sezioni razionali della superficie ellittica di Legendre sono le quattro elencate sopra, ossia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. In altre parole si ha*

$$\mathcal{L}(S) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}.$$

2. *Ogni sezione di torsione di $\mathcal{L} \to S$ (di qualsiasi ordine) è algebrica non ramificata su S.*

Alcuni risultati

Teorema

1. *Le uniche sezioni razionali della superficie ellittica di Legendre sono le quattro elencate sopra, ossia* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. *In altre parole si ha*
$$\mathcal{L}(S) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}.$$
2. *Ogni sezione di torsione di* $\mathcal{L} \to S$ *(di qualsiasi ordine) è algebrica non ramificata su* S.

Esempi di sezioni di $\mathcal{L} \to S$

Riepilogo

- *Sezioni razionali:*

$$\mathcal{L}(S) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\};$$

- *Esempi di sezioni non ramificate:*

  sezioni di torsione di ordine $n > 2$;

- *Esempio di sezione algebrica ramificata:*

$$\sigma(\lambda) = \left(2, \sqrt{2(2-\lambda)}\right) \quad \textbf{\textit{(sezione di Masser)}}$$

Domanda

Domanda:

È vero che ogni sezione algebrica non ramificata su S è necessariamente di torsione?

Superfici ellittiche modulari

Sia Γ un sottogruppo di indice finito del gruppo modulare $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Il quoziente $\mathbb{H}/\Gamma$, aggiungendo un numero finito di cuspidi, forma una superficie di Riemann compatta B_Γ.

Invarianti

- ***invariante funzionale***: *una mappa*

$$J_\Gamma : B_\Gamma \to \mathbb{P}_1;$$

- ***invariante omologico***: *un fascio G_Γ localmente costante con stalk generico $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Superfici ellittiche modulari

Sia $\mathcal{F}(J_\Gamma, G_\Gamma)$ la famiglia di tutte le superfici ellittiche non necessariamente algebriche su Δ_Γ che hanno J_Γ come invariante funzionale e G_Γ come invariante omologico. A meno di isomorfismi su Δ_Γ, all'interno di questa famiglia esiste un'unica superficie ellittica algebrica non singolare $\mathcal{E}_\Gamma$ che ammette una sezione globale.

Definizione

La superficie ellittica $\mathcal{E}_\Gamma \to \Delta_\Gamma$ è detta ***superficie ellittica modulare associata al gruppo*** $\mathbf{\Gamma}$*.*

Superfici ellittiche modulari

Consideriamo le superfici ellittiche ottenute come pull-back di $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & S, \end{tikzcd}$$

tramite un rivestimento non ramificato $B \to S$.

Osservazione

Queste superfici sono superfici ellittiche modulari (secondo Shioda); in particolare sono quelle associate (secondo la costruzione di Kodaira) ai sottogruppi $\Gamma := \pi_1(B)$ di indice finito del gruppo di monodromia Γ_2.

Teorema di Shioda

Teorema

Ogni sezione $\sigma : B \to \mathcal{E}$ di una superficie ellittica modulare è una sezione di torsione.

Due approcci alla dimostrazione

1. ***Dimostrazione di Shioda:*** *utilizzare la formula di Shioda-Tate:*

$$r = \rho - 2 - \sum_{s \in B} (n_s - 1);$$

2. ***Dimostrazione di Corvaja-Zannier:*** *utilizzare il logaritmo modulare f_σ della sezione σ.*

Teorema di Shioda

Teorema

Ogni sezione $\sigma : B \to \mathcal{E}$ di una superficie ellittica modulare è una sezione di torsione.

Due approcci alla dimostrazione

1. ***Dimostrazione di Shioda:*** *utilizzare la formula di Shioda-Tate:*

$$r = \rho - 2 - \sum_{s \in B} (n_s - 1);$$

2. ***Dimostrazione di Corvaja-Zannier:*** *utilizzare il logaritmo modulare f_σ della sezione σ.*

Teorema di Shioda

Teorema

Ogni sezione $\sigma : B \to \mathcal{E}$ di una superficie ellittica modulare è una sezione di torsione.

Due approcci alla dimostrazione

1. ***Dimostrazione di Shioda:*** *utilizzare la formula di Shioda-Tate:*

$$r = \rho - 2 - \sum_{s \in B} (n_s - 1);$$

2. ***Dimostrazione di Corvaja-Zannier:*** *utilizzare il logaritmo modulare f_σ della sezione σ.*

Sezioni di $\mathcal{L} \to S$

Riepilogo

- *Sezioni razionali:*

$$\mathcal{L}(S) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\};$$

- *{Sezioni algebriche non ramificate}={Sezioni di torsione};*
- *{Sezioni algebriche ramificate}={Sezioni di non-torsione}.*

Bibliografia

- P. Corvaja, J. Noguchi, U. Zannier, *Analytic and rational sections of relative semi-abelian varieties*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2022.
- P. Corvaja, U. Zannier, *Unramified sections of the Legendre scheme and modular forms*, Journal of Geometry and Physics, 2021.
- T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan 24, 1972.
- J. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag,

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!