

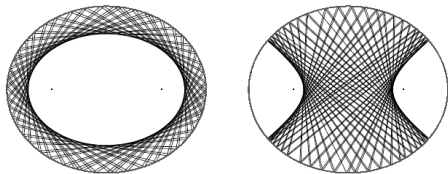
# Teoremi di finitezza sui biliardi ellittici

Pietro Corvaja - Università di Udine

Torino, 21 Settembre 2022

# Biliardi ellittici

## Biliardi ellittici



Tutte le traiettorie sono tangenti ad un'altra conica, chiamata *caustica*.

L'obiettivo è la discussione del seguente risultato ottenuto in collaborazione con Umberto Zannier:

L'obiettivo è la discussione del seguente risultato ottenuto in collaborazione con Umberto Zannier:

**Teorema** Dato un biliardo ellittico, due punti interni  $A, B$  non entrambi fuochi e un punto  $C$  sul bordo (la buca),

L'obiettivo è la discussione del seguente risultato ottenuto in collaborazione con Umberto Zannier:

**Teorema** Dato un biliardo ellittico, due punti interni  $A, B$  non entrambi fuochi e un punto  $C$  sul bordo (la buca), esiste solo un numero finito di lanci da  $A$  che colpiscono  $B$  e finiscono in  $C$ .

La superficie del biliardo.

La superficie del biliardo.  
Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo.



La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ .

La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ . Ogni segmento è tangente ad un'unica caustica.

La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ . Ogni segmento è tangente ad un'unica caustica. Le caustiche sono parametrizzate dalla retta  $\mathbb{P}_1$ .

La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ . Ogni segmento è tangente ad un'unica caustica. Le caustiche sono parametrizzate dalla retta  $\mathbb{P}_1$ . Resta definita una mappa razionale

$$S \dashrightarrow \mathbb{P}_1$$

le cui fibre risultano di genere 1.

La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ . Ogni segmento è tangente ad un'unica caustica. Le caustiche sono parametrizzate dalla retta  $\mathbb{P}_1$ . Resta definita una mappa razionale

$$S \dashrightarrow \mathbb{P}_1$$

le cui fibre risultano di genere 1.

Il rimbalzo è definito da un automorfismo birazionale di  $S$  che conserva le fibre.

La superficie del biliardo.

Sia  $\mathcal{C}$  l'ellisse bordo del biliardo. Ogni segmento di traiettoria corrisponde ad una coppia ordinata  $(P_1, P_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} =: S$ . Ogni segmento è tangente ad un'unica caustica. Le caustiche sono parametrizzate dalla retta  $\mathbb{P}_1$ . Resta definita una mappa razionale

$$S \dashrightarrow \mathbb{P}_1$$

le cui fibre risultano di genere 1.

Il rimbalzo è definito da un automorfismo birazionale di  $S$  che conserva le fibre. Dando alle fibre la struttura di curva ellittica, il rimbalzo risulta una traslazione.

Operando con scoppiamenti, otteniamo una superficie ellittica razionale  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  munita di una sezione (la sezione del biliardo), oltre alla sezione nulla.

Operando con scoppamenti, otteniamo una superficie ellittica razionale  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  munita di una sezione (la sezione del biliardo), oltre alla sezione nulla. La traslazione per la sezione del biliardo descrive il rimbalzo.



I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica).

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ .

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ .  
Dopo cambio di base otteniamo una nuova superficie ellittica

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$$

munita di quattro sezioni particolari  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \tau$ .

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ . Dopo cambio di base otteniamo una nuova superficie ellittica

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$$

munita di quattro sezioni particolari  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \tau$ . La base parametrizza le caustiche (con molteplicità).

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ .  
Dopo cambio di base otteniamo una nuova superficie ellittica

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$$

munita di quattro sezioni particolari  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \tau$ . La base parametrizza le caustiche (con molteplicità). La sezione  $\sigma_A$  associa ad ogni punto della base  $p$  un lancio (segmento congiungente bordi del biliardo) con caustica  $p$  passante per  $A$ .

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ .

Dopo cambio di base otteniamo una nuova superficie ellittica

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$$

munita di quattro sezioni particolari  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \tau$ . La base parametrizza le caustiche (con molteplicità). La sezione  $\sigma_A$  associa ad ogni punto della base  $p$  un lancio (segmento congiungente bordi del biliardo) con caustica  $p$  passante per  $A$ . La sezione  $\tau$  dà il rimbalzo:

I lanci che passano per un punto, diciamo  $A$ , formano una multisezione della fibrazione  $S \rightarrow \mathbb{P}_1$  (ossia una sezione algebrica). Idem per quelli che passano per  $B$  e per  $C$ . Dopo cambio di base otteniamo una nuova superficie ellittica

$$\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$$

munita di quattro sezioni particolari  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \tau$ . La base parametrizza le caustiche (con molteplicità). La sezione  $\sigma_A$  associa ad ogni punto della base  $p$  un lancio (segmento congiungente bordi del biliardo) con caustica  $p$  passante per  $A$ . La sezione  $\tau$  dà il rimbalzo: ad ogni lancio  $x \in \mathcal{X}$ , il valore  $x + \tau(\pi(x))$  è il segmento di traiettoria seguente immediatamente  $x$  dopo il rimbalzo.

Vogliamo risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$



Vogliamo risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

in  $p \in \mathbb{P}_1$  (la caustica) e  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ .

Altro punto di vista:

Altro punto di vista: i lanci che passano per  $A$  formano una curva algebrica  $Y_A \subset S$ ; quelli che passano per  $B$  e per  $C$  altre curve  $Y_B, Y_C$  in  $S$ .

Altro punto di vista: i lanci che passano per  $A$  formano una curva algebrica  $Y_A \subset S$ ; quelli che passano per  $B$  e per  $C$  altre curve  $Y_B, Y_C$  in  $S$ . Indichiamo con  $\tau$  l'automorfismo del rimbalzo.

Altro punto di vista: i lanci che passano per  $A$  formano una curva algebrica  $Y_A \subset S$ ; quelli che passano per  $B$  e per  $C$  altre curve  $Y_B, Y_C$  in  $S$ . Indichiamo con  $\tau$  l'automorfismo del rimbalzo. Cerchiamo un punto  $y \in Y_A$  la cui orbita rispetto a  $\tau$  intersechi sia  $Y_B$  sia  $Y_C$ .

Altro punto di vista: i lanci che passano per  $A$  formano una curva algebrica  $Y_A \subset S$ ; quelli che passano per  $B$  e per  $C$  altre curve  $Y_B, Y_C$  in  $S$ . Indichiamo con  $\tau$  l'automorfismo del rimbalzo. Cerchiamo un punto  $y \in Y_A$  la cui orbita rispetto a  $\tau$  intersechi sia  $Y_B$  sia  $Y_C$ .  
Il teorema precedente fornisce la finitezza di tali punti.

Altro punto di vista: i lanci che passano per  $A$  formano una curva algebrica  $Y_A \subset S$ ; quelli che passano per  $B$  e per  $C$  altre curve  $Y_B, Y_C$  in  $S$ . Indichiamo con  $\tau$  l'automorfismo del rimbalzo. Cerchiamo un punto  $y \in Y_A$  la cui orbita rispetto a  $\tau$  intersechi sia  $Y_B$  sia  $Y_C$ .

Il teorema precedente fornisce la finitezza di tali punti. Notiamo che se  $A, B$  fossero fuochi, allora  $\tau(Y_A) = Y_B$  e la finitezza non varrebbe.

**Problema.** Sia  $S$  una superficie algebrica,  $\tau$  un suo automorfismo.



**Problema.** Sia  $S$  una superficie algebrica,  $\tau$  un suo automorfismo. Siano  $Y_1, Y_2, Y_3$  tre curve algebriche su  $S$ .

**Problema.** Sia  $S$  una superficie algebrica,  $\tau$  un suo automorfismo. Siano  $Y_1, Y_2, Y_3$  tre curve algebriche su  $S$ . Al di fuori di casi particolari facilmente classificabili, l'insieme delle orbite per  $\tau$  che intersecano tutte e tre le curve è finito.

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre).

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

Per esempio: le pendenze dei lanci da  $A$  che vanno a finire (dopo un numero arbitrario di rimbalzi) su  $B$  sono numeri algebrici di altezza limitata.

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

Per esempio: le pendenze dei lanci da  $A$  che vanno a finire (dopo un numero arbitrario di rimbalzi) su  $B$  sono numeri algebrici di altezza limitata. Quindi il loro grado tende all'infinito.

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) = \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) = \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

Per esempio: le pendenze dei lanci da  $A$  che vanno a finire (dopo un numero arbitrario di rimbalzi) su  $B$  sono numeri algebrici di altezza limitata. Quindi il loro grado tende all'infinito.

Imponendo un'altra condizione dello stesso tipo si ottiene una situazione di *intersezione anomala*.

Risultati recenti di Ghioca-Hsia-Tucker e Barroero-Capuano -



$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) & = & \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) & = & \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

Per esempio: le pendenze dei lanci da  $A$  che vanno a finire (dopo un numero arbitrario di rimbalzi) su  $B$  sono numeri algebrici di altezza limitata. Quindi il loro grado tende all'infinito.

Imponendo un'altra condizione dello stesso tipo si ottiene una situazione di *intersezione anomala*.

Risultati recenti di Ghioca-Hsia-Tucker e Barroero-Capuano -  
ottenuti col metodo di Masser-Pila-Zannier -

$$\begin{cases} \sigma_A(p) + m \cdot \tau(p) & = & \sigma_B(p) \\ \sigma_B(p) + n \cdot \tau(p) & = & \sigma_C(p) \end{cases}$$

Le sezioni  $\sigma_A, \sigma : B, \sigma_C, \tau$  sono 'genericamente' indipendenti (modulo scelta 'canonica' dell'origine per la struttura di gruppo sulle fibre). I punti in cui soddisfano una relazione di dipendenza lineare hanno altezza limitata (teorema di Silverman).

Per esempio: le pendenze dei lanci da  $A$  che vanno a finire (dopo un numero arbitrario di rimbalzi) su  $B$  sono numeri algebrici di altezza limitata. Quindi il loro grado tende all'infinito.

Imponendo un'altra condizione dello stesso tipo si ottiene una situazione di *intersezione anomala*.

Risultati recenti di Ghioca-Hsia-Tucker e Barroero-Capuano - ottenuti col metodo di Masser-Pila-Zannier - forniscono la finitezza.

Nel caso particolare in cui il biliardo sia circolare,

Nel caso particolare in cui il biliardo sia circolare, il problema si riconduce al seguente:

Nel caso particolare in cui il biliardo sia circolare, il problema si riconduce al seguente: data una curva algebrica  $Z \subset \mathbb{G}_m^3$ , determinare i punti di  $Z$  le cui coordinate soddisfano due relazioni di dipendenza moltiplicativa.

Nel caso particolare in cui il biliardo sia circolare, il problema si riconduce al seguente: data una curva algebrica  $Z \subset \mathbb{G}_m^3$ , determinare i punti di  $Z$  le cui coordinate soddisfano due relazioni di dipendenza moltiplicativa.

Un teorema di Bombieri-Masser-Zannier e Maurin fornisce il risultato di finitezza.

## Altro caso risolto del Problema generale

**Teorema** Siano  $L_1, L_2, L_3$  tre rette in  $\mathbb{P}_2$  e  $\beta \in \text{PGL}_3$  un automorfismo lineare di  $\mathbb{P}_2$ .

## Altro caso risolto del Problema generale

**Teorema** Siano  $L_1, L_2, L_3$  tre rette in  $\mathbb{P}_2$  e  $\beta \in \text{PGL}_3$  un automorfismo lineare di  $\mathbb{P}_2$ . Supponiamo che le tre rette appartengano ad orbite distinte per  $\beta$  e che nessuna delle tre contenga punti fissi per  $\beta$ .



## Altro caso risolto del Problema generale

**Teorema** Siano  $L_1, L_2, L_3$  tre rette in  $\mathbb{P}_2$  e  $\beta \in \text{PGL}_3$  un automorfismo lineare di  $\mathbb{P}_2$ . Supponiamo che le tre rette appartengano ad orbite distinte per  $\beta$  e che nessuna delle tre contenga punti fissi per  $\beta$ . Allora esiste solo un numero finito di orbite per  $\beta$  che incontrino  $L_1, L_2$  e  $L_3$ .

## Altro caso risolto del Problema generale

**Teorema** Siano  $L_1, L_2, L_3$  tre rette in  $\mathbb{P}_2$  e  $\beta \in \text{PGL}_3$  un automorfismo lineare di  $\mathbb{P}_2$ . Supponiamo che le tre rette appartengano ad orbite distinte per  $\beta$  e che nessuna delle tre contenga punti fissi per  $\beta$ . Allora esiste solo un numero finito di orbite per  $\beta$  che incontrino  $L_1, L_2$  e  $L_3$ .

La dimostrazione usa il teorema del sottospazio.

Cerchiamo infatti punti  $P \in L_1$  tali che per opportuni interi  $m, n$  si abbia  $\beta^m(P) \in L_2$  e  $\beta^n(P) \in L_3$ .

Cerchiamo infatti punti  $P \in L_1$  tali che per opportuni interi  $m, n$  si abbia  $\beta^m(P) \in L_2$  e  $\beta^n(P) \in L_3$ .

In altri termini vogliamo che le tre rette

$$L_1, \quad \beta^{-m}(L_2), \quad \beta^{-n}(L_3)$$

s'incontrino in un punto.

Cerchiamo infatti punti  $P \in L_1$  tali che per opportuni interi  $m, n$  si abbia  $\beta^m(P) \in L_2$  e  $\beta^n(P) \in L_3$ .

In altri termini vogliamo che le tre rette

$$L_1, \quad \beta^{-m}(L_2), \quad \beta^{-n}(L_3)$$

s'incontrino in un punto. Chiamati  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$  dei vettori di equazioni per le tre rette,

Cerchiamo infatti punti  $P \in L_1$  tali che per opportuni interi  $m, n$  si abbia  $\beta^m(P) \in L_2$  e  $\beta^n(P) \in L_3$ .

In altri termini vogliamo che le tre rette

$$L_1, \quad \beta^{-m}(L_2), \quad \beta^{-n}(L_3)$$

s'incontrino in un punto. Chiamati  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$  dei vettori di equazioni per le tre rette, la condizione diventa

$$\det(v_1, \beta^{-m}v_2, \beta^{-n}v_3) = 0$$

da risolvere in  $m, n$ .

Cerchiamo infatti punti  $P \in L_1$  tali che per opportuni interi  $m, n$  si abbia  $\beta^m(P) \in L_2$  e  $\beta^n(P) \in L_3$ .

In altri termini vogliamo che le tre rette

$$L_1, \quad \beta^{-m}(L_2), \quad \beta^{-n}(L_3)$$

s'incontrino in un punto. Chiamati  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$  dei vettori di equazioni per le tre rette, la condizione diventa

$$\det(v_1, \beta^{-m}v_2, \beta^{-n}v_3) = 0$$

da risolvere in  $m, n$ . Per una matrice semi-semplice  $\beta$  diventa un'equazione esponenziale (equazione in  $S$ -unità).

## Considerazioni diofantee



## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo:

## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo: Le soluzioni hanno altezza limitata.

## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo: Le soluzioni hanno altezza limitata. Bisogna limitarne il grado.

## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo: Le soluzioni hanno altezza limitata. Bisogna limitarne il grado.

Nel caso delle tre rette nel piano:

## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo: Le soluzioni hanno altezza limitata. Bisogna limitarne il grado.

Nel caso delle tre rette nel piano: ci si riconduce ad equazioni in un campo di numeri fissato.

## Considerazioni diofantee

Nel caso del biliardo: Le soluzioni hanno altezza limitata. Bisogna limitarne il grado.

Nel caso delle tre rette nel piano: ci si riconduce ad equazioni in un campo di numeri fissato. Bisogna limitarne l'altezza.