Problemi diofantei con numeri primi

Alessandro Zaccagnini

in collaborazione con Alessandro Gambini e Alessandro Languasco

Torino, 26 ottobre 2017

Approssimazione diofantea con numeri primi

Dati r numeri reali positivi k_1, ..., k_r, consideriamo la funzione

$$F(\mathbf{x};\mathbf{k}) = F(x_1,\dots,x_r;k_1,\dots,k_r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda_1 x_1^{k_1} + \cdots + \lambda_r x_r^{k_r}$$

dove le variabili x_j assumono valori reali positivi e λ_1, ..., λ_r sono fissati numeri reali non nulli

Approssimazione diofantea con numeri primi

Dati r numeri reali positivi k_1, ..., k_r, consideriamo la funzione

$$F(\mathbf{x};\mathbf{k}) = F(x_1,\dots,x_r;k_1,\dots,k_r) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 x_1^{k_1} + \cdots + \lambda_r x_r^{k_r}$$

dove le variabili x_j assumono valori reali positivi e λ_1, ..., λ_r sono fissati numeri reali non nulli

Si vuole sapere sotto quali condizioni per questi ultimi coefficienti è vero che, fissato arbitrariamente il numero reale ω, la disuguaglianza

$$|F(\mathbf{p};\mathbf{k}) - \omega| \le \eta$$

ha infinite soluzioni $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_r)$, dove i p_j sono tutti numeri primi, ed $\eta > 0$ è arbitrario

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p}; \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p}; \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i k_j sono interi e tutti i λ_j sono razionali, allora esiste un intero N tale che $N \cdot F(\mathbf{p}; \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \in \mathbb{R}$ se $\omega N \notin \mathbb{Z}$

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i k_j sono interi e tutti i λ_j sono razionali, allora esiste un intero N tale che $N \cdot F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \in \mathbb{R}$ se $\omega N \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i coefficienti λ_j sono positivi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) > 0$ e non è possibile approssimare $\omega < 0$

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i k_j sono interi e tutti i λ_j sono razionali, allora esiste un intero N tale che $N \cdot F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \in \mathbb{R}$ se $\omega N \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i coefficienti λ_j sono positivi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) > 0$ e non è possibile approssimare $\omega < 0$
- Se $\rho(F) := \sum_j k_j^{-1} \le 1$, la "maggior parte" dei numeri reali non è approssimabile

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i k_j sono interi e tutti i λ_j sono razionali, allora esiste un intero N tale che $N \cdot F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \in \mathbb{R}$ se $\omega N \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i coefficienti λ_j sono positivi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) > 0$ e non è possibile approssimare $\omega < 0$
- Se $\rho(F) := \sum_j k_j^{-1} \le 1$, la "maggior parte" dei numeri reali non è approssimabile

Imporremo ai coefficienti la condizione diofantea che λ_i/λ_j sia irrazionale per un'opportuna scelta di i e j e che non siano tutti dello stesso segno

Condizioni necessarie

- Se tutti i k_j e tutti i λ_j sono interi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i k_j sono interi e tutti i λ_j sono razionali, allora esiste un intero N tale che $N \cdot F(\mathbf{p};\mathbf{k}) \in \mathbb{Z}$ e non è possibile approssimare $\omega \in \mathbb{R}$ se $\omega N \notin \mathbb{Z}$
- Se tutti i coefficienti λ_j sono positivi, allora $F(\mathbf{p};\mathbf{k}) > 0$ e non è possibile approssimare $\omega < 0$
- Se $\rho(F) := \sum_j k_j^{-1} \le 1$, la "maggior parte" dei numeri reali non è approssimabile

Imporremo ai coefficienti la condizione diofantea che λ_i/λ_j sia irrazionale per un'opportuna scelta di i e j e che non siano tutti dello stesso segno

Inoltre, la densità $\rho(F)$ dovrà essere sufficientemente grande

Densità e numero delle variabili

È plausibile che, se ρ ed r sono sufficientemente grandi, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ fissato, la disuguaglianza

$$|F(\mathbf{p}; \mathbf{k}) - \omega| \leq \eta$$

abbia infinite soluzioni per ogni $\eta > 0$

Densità e numero delle variabili

È plausibile che, se ρ ed r sono sufficientemente grandi, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ fissato, la disuguaglianza

$$|F(\mathbf{p}; \mathbf{k}) - \omega| \leq \eta$$

abbia infinite soluzioni per ogni $\eta > 0$

Questo può valere anche se $\eta \to 0^+$; ci si aspetta di poter prendere

$$\eta = \left(\max\{p_1^{k_1}, \dots, p_r^{k_r}\}\right)^{-\psi}$$

dove $\psi = \psi(F) > 0$, almeno quando $\rho(F)$ è grande

Il nostro problema

Qui ci occupiamo del problema ternario corrispondente a

$$\mathbf{k} = (1, 1, k)$$

dove $k > 1$ è un parametro "libero"

Il nostro problema

Qui ci occupiamo del problema ternario corrispondente a

$$\mathbf{k} = (1, 1, k)$$

dove $k > 1$ è un parametro "libero"

Vogliamo trovare un intervallo $[1, k_0]$ e una funzione $\psi = \psi(k)$, strettamente positiva su $[1, k_0]$, tale che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ fissato, la disuguaglianza

$$\left|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega\right| \le \eta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\max\{p_1, p_2, p_3^k\}\right)^{-\psi(k)}$$

ha infinite soluzioni in numeri primi, per tutti i $k \in [1, k_0]$

Il nostro problema

Qui ci occupiamo del problema ternario corrispondente a

$$\mathbf{k} = (1, 1, k)$$

dove $k > 1$ è un parametro "libero"

Vogliamo trovare un intervallo $[1, k_0]$ e una funzione $\psi = \psi(k)$, strettamente positiva su $[1, k_0]$, tale che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ fissato, la disuguaglianza

$$\left|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega\right| \leq \eta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\max\{p_1, p_2, p_3^k\}\right)^{-\psi(k)}$$

ha infinite soluzioni in numeri primi, per tutti i $k \in [1, k_0]$

Nel nostro caso $k_0 = 3$ e $\psi(k)$ è una funzione esplicita ma complicata di k

La tecnica di Davenport & Heilbronn

Definiamo

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, p_2, p_3) \colon p_1, p_2, p_3^k \in [\delta X, X]\}$$

La tecnica di Davenport & Heilbronn

Definiamo

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(p_1, p_2, p_3)\colon p_1, p_2, p_3^k \in [\delta X, X]\}$$

Vogliamo stimare il numero $\mathcal{N}(X)$ di soluzioni della disuguaglianza

$$\left|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega\right| \le \eta$$

dove $(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}(X)$

La tecnica di Davenport & Heilbronn

Definiamo

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(p_1, p_2, p_3)\colon\, p_1, p_2, p_3^k \in [\delta X, X]\}$$

Vogliamo stimare il numero $\mathcal{N}(X)$ di soluzioni della disuguaglianza

$$\left|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega\right| \le \eta$$

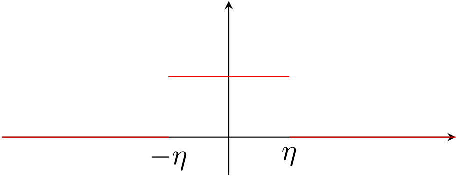
dove $(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}(X)$

In generale ci si aspetta che

$$\mathcal{N}(X) \gg \eta X^{\rho-1}$$

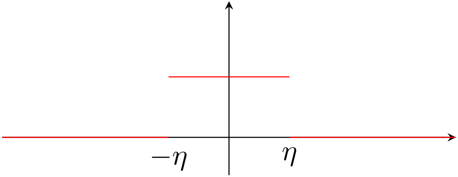
Misura di prossimità

Abbiamo bisogno di una misura di prossimità: quella naturale è $\chi([-\eta, \eta])$



Misura di prossimità

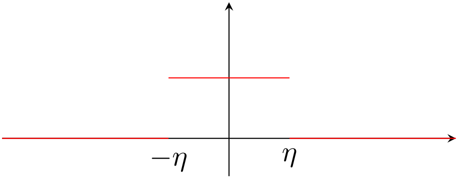
Abbiamo bisogno di una misura di prossimità: quella naturale è $\chi([-\eta,\eta])$



$$\widehat{\chi}_\eta(\alpha) = \frac{\sin(2\pi\alpha\eta)}{\pi\alpha}$$

Misura di prossimità

Abbiamo bisogno di una misura di prossimità: quella naturale è $\chi([-\eta, \eta])$

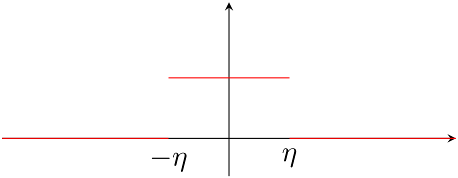


$$\widehat{\chi}_\eta(\alpha) = \frac{\sin(2\pi\alpha\eta)}{\pi\alpha}$$

Ma ha il difetto che la sua trasformata di Fourier $\widehat{\chi}$ non decade abbastanza rapidamente all'infinito (perché χ è discontinua)

Misura di prossimità

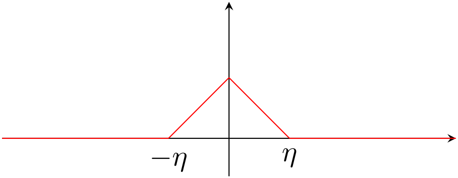
Abbiamo bisogno di una misura di prossimità: quella naturale è $\chi([-\eta, \eta])$



$$\widehat{\chi}_\eta(\alpha) = \frac{\sin(2\pi\alpha\eta)}{\pi\alpha}$$

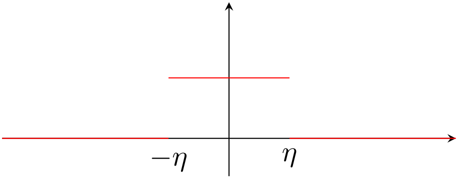
Ma ha il difetto che la sua trasformata di Fourier $\widehat{\chi}$ non decade abbastanza rapidamente all'infinito (perché χ è discontinua)

Allora scegliamo $f_\eta(\alpha) = \max(0, \eta - |\alpha|)$



Misura di prossimità

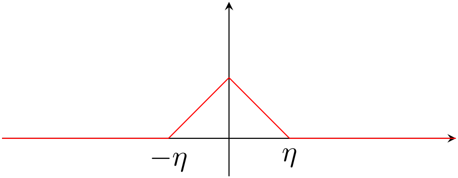
Abbiamo bisogno di una misura di prossimità: quella naturale è $\chi([-\eta,\eta])$



$$\widehat{\chi}_\eta(\alpha) = \frac{\sin(2\pi\alpha\eta)}{\pi\alpha}$$

Ma ha il difetto che la sua trasformata di Fourier $\widehat{\chi}$ non decade abbastanza rapidamente all'infinito (perché χ è discontinua)

Allora scegliamo $f_\eta(\alpha) = \max(0, \eta - |\alpha|)$



$$\widehat{f_\eta}(\alpha) = \Big(\frac{\sin(\pi\alpha\eta)}{\pi\alpha}\Big)^2$$

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega\alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega \alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile. Usando la definizione di K_η

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega \alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile. Usando la definizione di K_η

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathbb{R}) = \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \quad \widehat{K}_\eta(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega)$$

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega\alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile. Usando la definizione di K_η

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X, \eta, \mathbb{R}) &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \quad \widehat{K}_\eta(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega) \\ &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \\ &\qquad \times \max\bigl(0, \eta - |\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega|\bigr) \end{aligned}$$

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega \alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile. Usando la definizione di K_η

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X, \eta, \mathbb{R}) &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \quad \widehat{K}_\eta(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega) \\ &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \\ &\qquad\qquad \times \max\bigl(0, \eta - |\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega|\bigr) \\ &\le \eta (\log X)^3 \mathcal{N}(X) \end{aligned}$$

Introduciamo la somma esponenziale

$$S_k(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{p^k \in [\delta X, X]} \log(p) \mathrm{e}(p^k \alpha)$$

dove $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$. Prendiamo $K_\eta = \widehat{f_\eta}$ e poniamo

$$\mathcal{I}(X, \eta, \mathfrak{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathfrak{X}} S_1(\lambda_1 \alpha) S_1(\lambda_2 \alpha) S_k(\lambda_3 \alpha) K_\eta(\alpha) \mathrm{e}(-\omega \alpha) \, \mathrm{d}\alpha$$

dove $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile. Usando la definizione di K_η

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X, \eta, \mathbb{R}) &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \quad \widehat{K}_\eta(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega) \\ &= \sum_{\mathcal{P}(X)} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \\ &\qquad \times \max\bigl(0, \eta - |\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega|\bigr) \\ &\leq \eta (\log X)^3 \mathcal{N}(X) \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{I}(X, \eta, \mathbb{R}) > 0$

Strategia della dimostrazione

Dimostreremo che esiste una successione $X_n \to +\infty$ tale che $\mathcal{I}(X_n, \eta, \mathbb{R}) \gg \eta^2 X_n^{\rho-1}$, dove $\eta = \eta(X_n) = X_n^{-\psi(k)}$ (a posteriori)

Strategia della dimostrazione

Dimostreremo che esiste una successione $X_n \to +\infty$ tale che $\mathcal{I}(X_n, \eta, \mathbb{R}) \gg \eta^2 X_n^{\rho-1}$, dove $\eta = \eta(X_n) = X_n^{-\psi(k)}$ (a posteriori)
La scelta cade su $X_n = q_n^3$ dove

$$\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

cioè su una potenza del denominatore di un convergente della frazione continua di λ_1/λ_2

Strategia della dimostrazione

Dimostreremo che esiste una successione $X_n \to +\infty$ tale che $\mathcal{I}(X_n, \eta, \mathbb{R}) \gg \eta^2 X_n^{\rho-1}$, dove $\eta = \eta(X_n) = X_n^{-\psi(k)}$ (a posteriori)

La scelta cade su $X_n = q_n^3$ dove

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

cioè su una potenza del denominatore di un convergente della frazione continua di λ_1/λ_2

Per brevità, continueremo a scrivere X invece di X_n

Strategia della dimostrazione

Dimostreremo che esiste una successione $X_n \to +\infty$ tale che $\mathcal{I}(X_n, \eta, \mathbb{R}) \gg \eta^2 X_n^{\rho-1}$, dove $\eta = \eta(X_n) = X_n^{-\psi(k)}$ (a posteriori)

La scelta cade su $X_n = q_n^3$ dove

$$\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

cioè su una potenza del denominatore di un convergente della frazione continua di λ_1/λ_2

Per brevità, continueremo a scrivere X invece di X_n

Suddividiamo $\mathbb{R}$ in arco principale, secondario, banale

Strategia della dimostrazione

Dimostreremo che esiste una successione $X_n \to +\infty$ tale che $\mathcal{I}(X_n, \eta, \mathbb{R}) \gg \eta^2 X_n^{\rho-1}$, dove $\eta = \eta(X_n) = X_n^{-\psi(k)}$ (a posteriori)

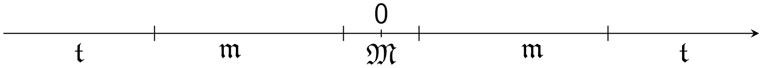
La scelta cade su $X_n = q_n^3$ dove

$$\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

cioè su una potenza del denominatore di un convergente della frazione continua di λ_1/λ_2

Per brevità, continueremo a scrivere X invece di X_n

Suddividiamo $\mathbb{R}$ in arco principale, secondario, banale



Arco principale e arco banale

Sull'arco principale "sostituiamo" la somma esponenziale S_k con una sua approssimazione piú semplice

Arco principale e arco banale

Sull'arco principale "sostituiamo" la somma esponenziale S_k con una sua approssimazione piú semplice, ottenendo il valore atteso per $\mathcal{N}(X)$ senza usare l'ipotesi diofantea $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$

Arco principale e arco banale

Sull'arco principale "sostituiamo" la somma esponenziale S_k con una sua approssimazione piú semplice, ottenendo il valore atteso per $\mathcal{N}(X)$ senza usare l'ipotesi diofantea $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$

Per stimare l'errore commesso nell'approssimazione, sono fondamentali stime precise di vario tipo (L^1, L^2, L^4, L^∞) per le diverse somme esponenziali sui numeri primi

Arco principale e arco banale

Sull'arco principale "sostituiamo" la somma esponenziale S_k con una sua approssimazione piú semplice, ottenendo il valore atteso per $\mathcal{N}(X)$ senza usare l'ipotesi diofantea $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$

Per stimare l'errore commesso nell'approssimazione, sono fondamentali stime precise di vario tipo (L^1, L^2, L^4, L^∞) per le diverse somme esponenziali sui numeri primi

Qui fa comodo avere tante variabili (r grande)

Arco principale e arco banale

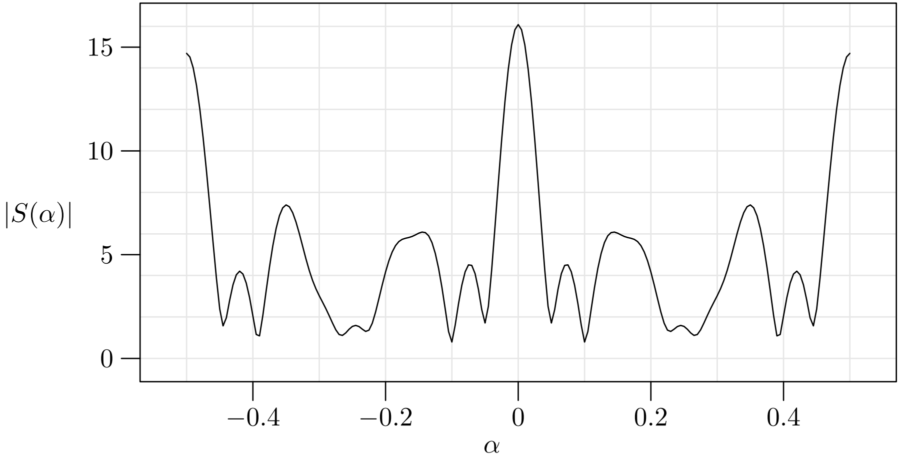
Sull'arco principale "sostituiamo" la somma esponenziale S_k con una sua approssimazione piú semplice, ottenendo il valore atteso per $\mathcal{N}(X)$ senza usare l'ipotesi diofantea $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$

Per stimare l'errore commesso nell'approssimazione, sono fondamentali stime precise di vario tipo (L^1, L^2, L^4, L^∞) per le diverse somme esponenziali sui numeri primi

Qui fa comodo avere tante variabili (r grande)

Sull'arco banale sfruttiamo il fatto che $\widehat{K}_\eta$ decade velocemente all'infinito

Arco secondario



Il grafico di $|S_1(\alpha)|$ per $X = 20$

Arco secondario

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \sim \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} X$$

Arco secondario

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \sim \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} X$$

È possibile che $\lambda_1\alpha$ e $\lambda_2\alpha$ siano entrambi "prossimi" ad un numero razionale, e quindi che $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ e $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ siano entrambi "grandi"?

Arco secondario

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \sim \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} X$$

È possibile che $\lambda_1\alpha$ e $\lambda_2\alpha$ siano entrambi “prossimi” ad un numero razionale, e quindi che $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ e $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ siano entrambi “grandi”?

$$\lambda_1\alpha \sim \frac{a_1}{q_1} \quad \text{e} \quad \lambda_2\alpha \sim \frac{a_2}{q_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1}$$

Arco secondario

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \sim \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} X$$

È possibile che $\lambda_1\alpha$ e $\lambda_2\alpha$ siano entrambi "prossimi" ad un numero razionale, e quindi che $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ e $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ siano entrambi "grandi"?

$$\lambda_1\alpha \sim \frac{a_1}{q_1} \quad \text{e} \quad \lambda_2\alpha \sim \frac{a_2}{q_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1}$$

Ma per ipotesi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim \frac{a}{q}$$

Arco secondario

$$S_1\left(\frac{a}{q}\right) \sim \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} X$$

È possibile che $\lambda_1\alpha$ e $\lambda_2\alpha$ siano entrambi "prossimi" ad un numero razionale, e quindi che $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ e $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ siano entrambi "grandi"?

$$\lambda_1\alpha \sim \frac{a_1}{q_1} \quad \text{e} \quad \lambda_2\alpha \sim \frac{a_2}{q_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1}$$

Ma per ipotesi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sim \frac{a}{q}$$

Quindi α appartiene ad un insieme di misura piccola

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

- $\mathfrak{m}_1$, dove almeno una fra $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ è piccola

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

- $\mathfrak{m}_1$, dove almeno una fra $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ è piccola
- $\mathfrak{m}_2$, dove $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ sono entrambe grandi

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

- $\mathfrak{m}_1$, dove almeno una fra $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ è piccola
- $\mathfrak{m}_2$, dove $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ sono entrambe grandi

Su $\mathfrak{m}_1$ sappiamo controllare la grandezza della funzione integranda

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

- $\mathfrak{m}_1$, dove almeno una fra $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ è piccola
- $\mathfrak{m}_2$, dove $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ sono entrambe grandi

Su $\mathfrak{m}_1$ sappiamo controllare la grandezza della funzione integranda

Su $\mathfrak{m}_2$ sappiamo controllare la misura dell'insieme di integrazione

Il metodo di Harman

Suddividiamo l'arco secondario $\mathfrak{m}$ in due parti

- $\mathfrak{m}_1$, dove almeno una fra $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ è piccola
- $\mathfrak{m}_2$, dove $|S_1(\lambda_1\alpha)|$ ed $|S_1(\lambda_2\alpha)|$ sono entrambe grandi

Su $\mathfrak{m}_1$ sappiamo controllare la grandezza della funzione integranda

Su $\mathfrak{m}_2$ sappiamo controllare la misura dell'insieme di integrazione

Sappiamo dimostrare che $\mathcal{I}(X,\eta,\mathfrak{m}) = o(\mathcal{I}(X,\eta,\mathfrak{M}))$ solo sulla successione $X_n \to +\infty$

In conclusione . . .

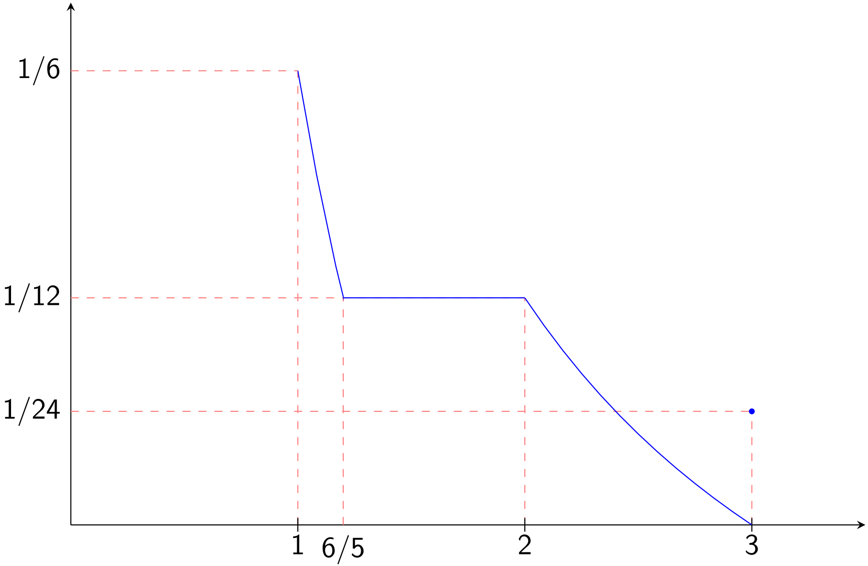
Teorema (A. Gambini, A. Languasco, A. Z. (2017))

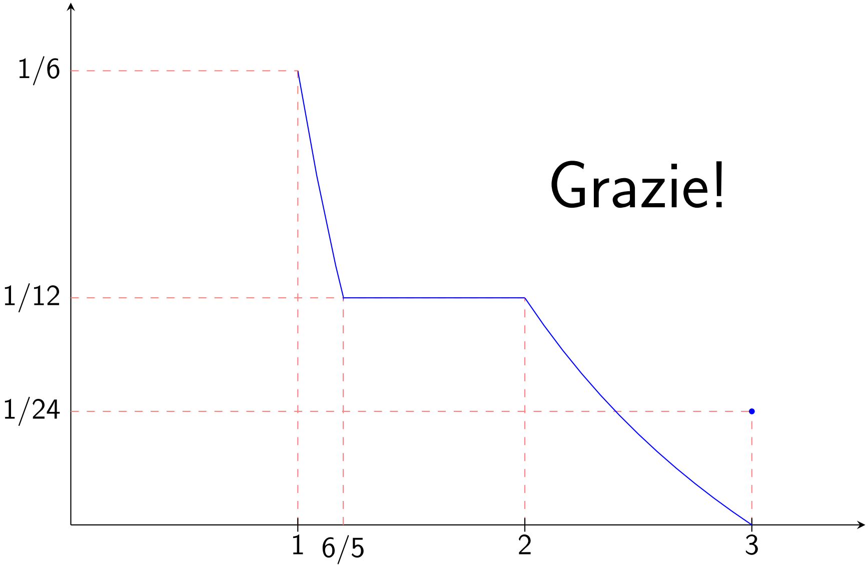
Supponiamo che $k \in (1, 3]$, λ_1, λ_2 *e* $\lambda_3 \in \mathbb{R}^*$ *non abbiano lo stesso segno, che* λ_1/λ_2 *sia irrazionale e sia* $\omega \in \mathbb{R}$. *La disuguaglianza*

$$|\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3^k - \omega| \le \left(\max\{p_1, p_2, p_3^k\}\right)^{-\psi(k)+\varepsilon}$$

ha un'infinità di soluzioni in numeri primi p_1, p_2, p_3 *per ogni* $\varepsilon > 0$, *dove*

$$\psi(k) = \begin{cases} (3-2k)/(6k) & \textit{se } 1 < k \le \frac{6}{5} \\ 1/12 & \textit{se } \frac{6}{5} < k \le 2 \\ (3-k)/(6k) & \textit{se } 2 < k < 3 \\ 1/24 & \textit{se } k = 3 \end{cases}$$


1/6
1/12
1/24
1
6/5
2
3



Grazie!